Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет \имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Естественные и математические науки»

МЕТОД ФУРЬЕ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методические указания
для практических занятий и самостоятельной работы студентов
направлений

09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
09.03.04 «Программная инженерия»
15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
15.03.05 «Конструкторско-технологическоеобеспечение машиностроительных производств»
18.03.01 «Химическая технология»
23.03.01 «Нефтегазовое дело»
29.03.05 «Конструирование изделий легкой промышленности»

Электронное издание комбинированного распространения

Одобрено
редакционно-издательским советом
ЭТИ (филиал) СГТУ имени Гагарина Ю.А.

Энгельс 2026 г

ВВЕДЕНИЕ

Математические модели многих задач в естественных науках и технике содержат дифференциальные уравнения с частными производными. Такие уравнения принято называть уравнениями математической физики. Большой интерес для приложений представляют линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Методы решения для этих уравнений изучены достаточно хорошо. К таким методам относится метод Фурье – метод разделения переменных. С его помощью успешно решаются динамические задачи, в которых приходится работать с уравнениями гиперболического типа. Примером таких задач служат колебания в стержневых системах, подробно рассмотренные в работе [1]. Метод Фурье применяется также при решении задач теплопроводности [2] для установившихся процессов (уравнения эллиптического типа) и для нестациоанарных задач (уравнения параболического типа).

Уравнения с частными производными могут иметь бесконечно много линейно независимых частных решений. Этим они отличаются от обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения линейных задач математической физики получают через суперпозицию таких частных решений. При этом в случае бесчисленного множества линейно независимых частных решений возникают интегралы, содержащие параметр. Если же множество частных решений счетное, то искомое решение задачи представляется через функциональный ряд. Данные методические указания содержат задачи, в решениях которых присутствуют функциональные ряды. При этом предполагается, что ряды имеют непрерывные суммы. Будем также полагать, что все встречающиеся

в решении ряды можно необходимое число раз дифференцировать почленно.

1. КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Рассмотрим прямолинейный стержень длины l с постоянным поперечным сечением площади S. Материал стержня однородный с плотностью ρ. Условия закрепления и нагружения стержня таковы, что реализуется одноосное растяжение-сжатие [3]. При резком изменении величины внешней нагрузки стержень выходит из состояния покоя и начинает совершать свободные продольные колебания. Выведем уравнение, которое описывает эти колебания.

Свяжем со стержнем декартову систему координат. Начало отсчета расположим в центре тяжести на левом конце стержня, координатную ось Ox направим вдоль геометрической оси стержня. Выделим участок стержня, проведя два поперечных сечения на расстояниях x и x + dx от начала отсчета. Рассмотрим равновесие выделеного участка под действием внутренних усилий N_1 и N_2, действующих со стороны соседних участков стержня (рис.1), а также сил инерции.

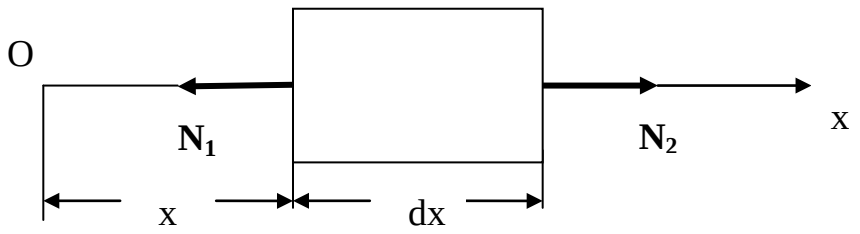

Рис.1

Приходим к уравнению вида

$$-N_1+N_2-\rho S dx\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}=0, \qquad (1)$$

где u(x,t) – осевое перемещение сечения стержня, зависящее от продольной координаты x и времени t. В рамках гипотез сопротивления материалов [3] распределение нормального напряжения σ по поперечному сечению стержня полагают равномерным, так что внутреннее осевое усилие N и напряжение σ связаны равенством

$$N=\sigma S\ . \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\rho dx\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = \sigma_2-\sigma_1\ . \qquad (3)$$

При условии, что материал стержня линейно упругий, связь между нормальным напряжением и осевой деформацией ε определяется законом Гука:

$$\sigma=E\varepsilon\ . \qquad (4)$$

Через E в формуле (4) обозначена механическая характеристика материала – модуль упругости (модуль Юнга). В свою очередь осевая деформация связана с продольным перемещением соотношением вида

$$\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial x}\ . \qquad (5)$$

С учетом равенств (4) и (5) уравнение (2) принимает вид

$$\rho dx\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 t}=E\left(\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)\ . \qquad (6)$$

Пренебрегая в правой части уравнения (6) бесконечно малыми величинами высших порядков, получим

$$\rho dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 t} = E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

и далее

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad a^2 = E/\rho . \qquad (7)$$

Уравнение (7) представляет собой уравнение свободных продольных колебаний упругого стержня.

К уравнению (7) следует добавить начальные и граничные условия. Начальные условия имеют вид

$$u(x,0)=f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=g(x).$$

Здесь f, g – заданные функции аргумента x, которые определяют соответственно перемещения и скорости поперечных сечений стержня в момент начала колебаний. Вид граничных условий зависит от способа закрепления и нагружения концов стержня.

В качестве примера рассмотрим стержень, у которого левый конец защемлен, а к правому концу приложена осевая сила (рис.2). Стержень находится в состоянии покоя.

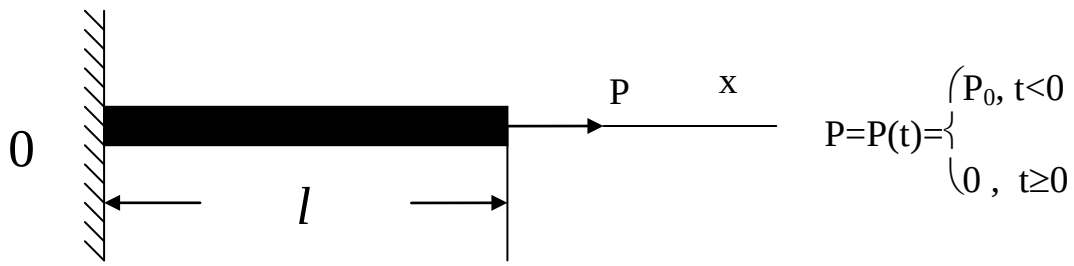

Рис.2

В некоторый момент времени, принятый за начальный, действие силы мгновенно прекращается. Стержень начинает совершать свободные колебания, которые описываются уравнением (7). Начальные условия имеют вид

$$u(x,0)=\frac{Px}{ES}, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0 . \tag{8}$$

Так как левый конец стержня защемлен, то

$$u(0,t)=0. \tag{9}$$

Правый конец стержня во время колебаний свободен от закреплений и внешних нагрузок, так что

$$N=0 \text{ при } x=l.$$

С учетом равенств (2), (4) и (5) последнее граничное условие можно представить в виде

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0 . \tag{10}$$

Решение краевой задачи (7)-(10) проведем методом Фурье [4].

Представим искомое решение в виде

$$u(x,t)=X(x)T(t). \tag{11}$$

Подставив выражение (11) в уравнение (7), получим после разделения переменных

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} .$$

Последнее равенство должно выполняться для всех значений $t>0$ и $0<x<l$.

Это возможно, если

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = C \text{ , где } C=\text{const}. \tag{12}$$

Тогда для определения X(x) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$X''-CX=0\ . \qquad (13)$$

К уравнению (13) следует добавить граничные условия

$$X(0)=0 \ \text{ и } \ X'(0)=0\ , \qquad (14)$$

полученные соответственно из условий (9) и (10). При значениях $C\geq 0$ задача (13), (14) имеет единственное решение

$$X(x)=0,$$

но тогда выражение (11) не задает перемещения при колебаниях. Значит, следует положить $C=-\lambda^2$. Тогда задача (13), (14) имеет множество решений

$$X_k(x)=D_k\sin\lambda_k x,\ \ \lambda_k=(k+½)\pi/l \quad (k=0,1,2,\ldots). \qquad (15)$$

Величины λ_k называются собственными числами, а $X_k(x)$ – собственными функциями задачи (13), (14).

Упражнение 1: Показать, что система собственных функций (15) является ортогональной на отрезке [0;l], то есть

$$\int_0^l X_k(x)\, X_k(x)dx=0\ ,\ \ \text{если}\ \ m\neq n.$$

Для определения функции T(t) имеем на основании уравнений (12) обыкновенное дифференциальное уравнение

$$T''+(\lambda_k a)^2T=0 \quad (k=0,1,2,\ldots),$$

общее решение которого имеет вид

$$T_k(t)=A_k\cos(\lambda_k a)t+B_k\sin(\lambda_k a)t \qquad (k=0,1,2,\ldots). \qquad (16)$$

С учетом выражений (11), (15) и (16) искомое решение будет представлено в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} [\, a_k\cos(\lambda_k a)t + b_k\sin(\lambda_k a)t \,]\sin\lambda_k x \,. \qquad (17)$$

Подставив выражение (17) в начальные условия (8), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\sin\lambda_k x = \frac{Px}{ES} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\lambda_k a)\sin\lambda_k x = 0 \,.$$

Последние равенства в силу ортогональности системы собственных функций (15) можно рассматривать как разложения в ряды Фурье. Тогда

$$a_k=(2P/lES)\int_0^l x\sin\lambda_k x dx = (2P/lES)[\, x(-\cos\lambda_k x)/\lambda_k \,\Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l (-\cos\lambda_k x)/\lambda_k dx \,] =$$

$$=(2P/lES\lambda_k^2)\sin(\lambda_k x)\,\Big|_{x=0}^{x=l} = (-1)^k(2P/lES\lambda_k^2) \quad \text{и} \quad b_k=0 \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Окончательно получим решение задачи (7)-(10) в виде

$$u(x,t)= \frac{8}{\pi^2}\,\frac{Pl}{ES}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}at\,\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x \,.$$

Упражнение 2. Решить задачу о свободных продольных колебаниях упругого стержня при заданных начальных и граничных условиях; вариант определить предпоследней цифре номера зачетной книжки.

2.1. $u(x,0) = -Px/ES$, $u'_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = 0$, $u'_x(l,t) = 0$.

2.2. $u(x,0) = 0$, $u'_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = 0$, $u'_x(l,t) = P/ES$.

2.3. $u(x,0) = 0$, $u'_t(x,0) = 0$; $u'_x(0,t)= P/ES$, $u'_x(l,t)=P/ES$.

2.4. $u(x,0) = -P(l-x)/ES$, $u'_t(x,0) = 0$; $u'_x(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$.

2.5. $u(x,0) = 0$, $u'_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = P/ES$, $u(l,t) = 0$.

2.6. $u(x,0) = 0$, $u'_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = 0$, $u(l,t)=Vt$.

2.7. $u(x,0) = 0$, $u'_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = -Vt$, $u(l,t)= 0$.

2.8. $u(x,0) = 0$, $u'_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = A\sin(\omega t)$.

2.9. $u(x,0) = 0$, $u'_t(x,0) = 0$; $u(0,t) = 0$, $u'_x(l,t) = (P/ES)\sin(\omega t)$.

2.10. $u(x,0) = 0$, $u'_t(x,0) = 0$; $u'_x(0,t) = (P/ES)\sin(\omega t)$, $u(l,t) = 0$.

2. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В СТЕРЖНЕ

Рассмотрим прямолинейный стержень конечной длины *l*. Свяжем с ним декартову систему координат, расположив начало отсчета на левом торцевом сечении и направив ось Ox вдоль оси стержня. Материал стержня считаем однородным с плотностью ρ, коэффициентом теплопроводности k и удельной объемной теплоемкостью c. Боковая поверхность стержня теплоизолирована, так что теплообмен с окружающей средой происходит только через торцевые сечения. В стержне отсутствуют внутренние источники тепла. В каждый момент времени температуру во всех точках данного поперечного сечения полагаем одинаковой. Температура θ(x,t) зависит тогда от продольной координаты x и времени t и удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}, \qquad a^2 = k/c\rho . \tag{18}$$

Постоянную a называют коэффициентом температуропроводности.

К уравнению теплопроводности следует добавить начальное условие вида

$$\theta(x,t)=f(x) \text{ при } 0<x<l$$

и граничные условия для сечений x=0, x=*l*.

Рассмотрим начальное и граничные условия следующего вида:

$$\theta(x,0)= \theta_0 , \tag{19}$$

$$\theta(0,t) = M, \ \frac{\partial\theta(l,t)}{\partial x} = 0. \tag{20}$$

Здесь θ_0 и M – заданные константы. Граничные условия (20) соответствуют случаю, когда на левом торце стержня поддерживается постоянная температура, а правый торец теплоизолирован.

Представим искомое решение задачи теплопроводности (18)-(20) в виде

$$\theta(x,t)=X(x)T(t)+\varphi(x).$$

Функцию $\varphi(x)$ следует выбрать так, чтобы сделать граничные условия для функции $X(x)$ однородными. При этом $\theta(x,t)$ должно удовлетворять однородному уравнению (18). Это достигается, если

$$\varphi''(x)=0 \text{ при } 0<x<l\,; \qquad \varphi(0)=M\,, \qquad \varphi'(l)=0\,.$$

Последние условия будут выполнены, если положить $\varphi(x)=ax+b$ при $b=M$ и $a=0$. Приходим к выражению

$$\theta(x,t)=M+X(x)T(t). \tag{21}$$

Подставив его в уравнение (18), после разделения переменных получаем

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X}\,.$$

Так как последнее равенство должно выполняться для всех значений $t>0$ и $0<x<l$, то

$$T'-C\,a^2T=0 \tag{22}$$

и

$$X''-CX=0,$$

где $C=\text{const}$. Общее решение уравнения (21) имеет вид

$$T(t)=A\exp(Ca^2t).$$

Ни в одном поперечном сечении стержня температура не может с течением времени неограниченно возрастать, так что $C=-\lambda^2$. Тогда

$$T(t)=A\exp(-\lambda^2a^2t)\,. \tag{23}$$

Дифференциальное уравнение для определения функции X(x) принимает вид

$$X''+\lambda^2X=0\ . \qquad (24)$$

Уравнение (23) решается при граничных условиях

$$X(0)=0 \ \text{ и } \ X'(0)=0\ , \qquad (25)$$

которые получаются при подстановке выражения (21) для температуры в граничные условия (20). Задача (24), (25) имеет множество решений

$$X_n(x)=B_n\sin\lambda_n x,\ \ (n=0,1,2,\ldots). \qquad (26)$$

Здесь $\lambda_n=(n+½)\pi/l$ – собственные числа задачи (24), (25), то есть допустимые значения параметра λ. Суммируя частные решения, которые получены при однородных граничных условиях, с учетом выражений (23) и (26) получим для решения задачи (18)-(20) следующее выражение

$$\theta(x,t)=M+\sum_{n=0}^{\infty} b_n\sin(\lambda_n x)\exp(-\lambda_n^2a^2t)\ .$$

Подставив теперь $\theta(x,t)$ в начальное условие (19), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n\sin(\ (n+½)\pi x/l\ ) = \theta_0-M.$$

Воспользуемся ортогональностью системы функций (26) и вычислим значения b_n по формулам для коэффициентов Фурье:

$$b_n=(2/l)\int_0^l(\theta_0-M)\sin(\ (n+½)\pi x/l\ )dx = -(2/l)(\theta_0-M)\ (\ l/(n+½)\pi\ )\cos(\ (n+½)\pi x/l\ )\Big|_{x=0}^{x=l}=$$

$$=\frac{2(M-\theta_0)}{(n+½)\pi}\ .$$

Тогда искомое распределение температуры будет представлено в виде

$$\theta(x,t)=M+2(M-\theta_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+½)}\sin((n+½)\pi x/l)\exp(-((n+½)\pi a/l)^2t)\ .$$

Упражнение 3. Найти решение задачи нестационарной теплопроводности для стержня конечной длины при заданных начальном и граничных условиях и значении коэффициента температуропроводности. Вариант задания определяется последней цифрой номера зачетной книжки.

3.1.	$\theta(x,0)=19\sin 5\pi x;$	$\theta(0,t)=0,$	$\theta'_x(0,5;t)=0;$	$a^2=2.$
3.2.	$\theta(x,0)=8\cos \pi x;$	$\theta'_x(0,t)=0,$	$\theta(1,5;t)=0;$	$a^2=5.$
3.3.	$\theta(x,0)=17\sin 3\pi x;$	$\theta(0,t)=0,$	$\theta'_x(2,5;t)=0;$	$a^2=8.$
3.4.	$\theta(x,0)=6\cos 9\pi x;$	$\theta'_x(0,t)=0,$	$\theta(3,5;t)=0;$	$a^2=1.$
3.5.	$\theta(x,0)=15\sin 3\pi x;$	$\theta(0,t)=0\ ,$	$\theta'_x(4,5;t)=0;$	$a^2=4.$
3.6.	$\theta(x,0)=5\sin 2\pi x-1+3x;$	$\theta(0,t)=-1,$	$\theta(2;t)=5;$	$a^2=9.$
3.7.	$\theta(x,0)=6\sin 3\pi x+2-3x;$	$\theta(0,t)=2,$	$\theta(3;t)=-7;$	$a^2=8.$
3.8.	$\theta(x,0)=7\sin 2\pi x-3+4x;$	$\theta(0,t)=-3,$	$\theta(1;t)=1;$	$a^2=7.$
3.9.	$\theta(x,0)=8\sin 4\pi x+4-5x;$	$\theta(0,t)=4,$	$\theta(2;t)=-6;$	$a^2=6.$
3.10.	$\theta(x,0)=9\sin 3\pi x-5+2x;$	$\theta(0,t)=-5,$	$\theta(3;t)=1;$	$a^2=5.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.:Наука, 1967. – 444 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности.–М.: Высш.шк.,1967. – 599 с.
3. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
4. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969. – 288 с.

МЕТОД ФУРЬЕ
В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методические указания и контрольные задания по курсу “Математика”
для самостоятельной работы студентов

Составили: СЕРЕБРЯКОВ Андрей Владимирович
ТРЕФИЛОВА Галина Максимовна

Рецензент